Proposition d'un formalisme comme support pour les études théoriques en systémique

Olivier Maurice, Alain Reineix

Proposition d'un formalisme comme support pour les études théoriques en systémique

Olivier MAURICE
Membre de l'AFSCET
Senior Scientist au GERAC
3 Avenue Jean d'Alembert 78190 Trappes
olivier.maurice@gerac.com

Alain REINEIX
Directeur de recherche CNRS
Laboratoire Xlim
123 Avenue Albert Thomas 87060 Limoges
alain.reineix@xlim.fr

1. Introduction

Il est difficile d'appréhender le fonctionnement d'un système complexe par le seul usage de la littérature. Les écrits de Newton sont d'ailleurs suffisamment difficiles à lire malgré leur excellente rédaction [1] pour s'en convaincre. Même si la mathématisation du comportement des systèmes complexes peut sembler être tout aussi difficile, les relativement récentes théories des ensembles et les travaux en topologie ont déjà montré leurs capacités à modéliser des phénomènes d'une grande complexité [2], suffisamment grande dans le cas de la mécanique quantique pour donner des résultats qui corroborent l'expérience, alors même que leurs mécanismes sont à peine compréhensibles par l'esprit humain [3]. Suivant la même démarche, les travaux récents en théorie des jeux commencent à savoir rendre compte de comportements complexes dans le domaine de l'économie [4]. Ce sont autant de pistes encourageantes pour essayer de conjuguer ces outils au service de la systémique. Et l'idée n'est pas nouvelle. Pour des besoins très appliqués, l'ingénieur Monsieur Gabriel Kron a élaboré une théorie tensorielle des réseaux pour construire des systèmes compliqués sur la base de transformations et de couplages de systèmes simples dès 1939 [5]. Sa démarche restera peu utilisée sauf par un cercle réduit de lecteurs qui auront bien voulus faire l'effort mathématique nécessaire à l'utilisation de sa méthode. Mais ces disciples verront tous leurs efforts récompensés par l'élaboration au travers de cette méthode d'analyse tensorielle, d'outils ou de modèles encore utilisés de nos jours. On citera entre autre le modèle de Branin [6], la méthode « TLM » [7], etc. Tous ces travaux ont eu pour point commun une représentation du monde (réduit à leur problématique) sous forme de graphes [8]. Le graphe est la représentation graphique concrète du réseau. Il en décrit les propriétés topologiques, l'organisation, les dimensions, etc. On peut ainsi représenter tout phénomène physique, de plus ces graphes sont utilisables en mécanique, en hydraulique, en chimie, en électronique, … On peut se doter d'une représentation du monde par des réseaux. Gabriel Kron l'avait compris, il fut d'ailleurs parmi les premiers à écrire des articles présentant des schémas équivalents pour des problèmes multiphysiques, incluant la mécanique quantique, les réseaux étant avant tout des images des échanges en énergie [9][10]. Sa vision du monde était une vision de graphes entrelacés, couplés, mais dans un formalisme qui restait déterministe – ces graphes étaient statiques. Sous ces graphes se dessinaient des propriétés qui pour certaines apparurent à Kron, nous pouvons citer par exemple les propriétés d'invariance sous des transformations. Ces propriétés n'avaient pas échappé à Monsieur Norbert Wiener qui dans son célèbre « Cybernetics » [11], abordait ces transformations et les groupes liés qui font partie des outils de base utiles à la robotique. Cette même robotique qui sera une des références de la systémique [12]. La formulation tensorielle trouve ici toute sa puissance pour essayer d'exprimer sous forme d'équations, des comportements au minimum compliqués. Mais sont-ils pour autant complexes ? Suivant Joël de Rosnay, la systémique ne peut être systématique. Pourtant, on peut imaginer que sans être systématique au sens où elle ne peut trouver une forme commune à la compréhension de systèmes variés, elle peut l'être dans le sens de s'appuyer sur des outils constants, mathématiques. Mais l'aspect dynamique de la complexité impose de fait l'idée d'une topologie qui ne soit pas rigide, mais puisse évoluer, se transformer elle-même dans le temps et l'espace. Les réseaux apparaissent dans ce dessin comme de simples supports physiques élémentaires dont l'agencement peut amener à un système hiérarchiquement plus complexe et qui évolue. Les concepts d'émergence, de transmission d'information avec une dimension d'abstraction non présente dans les réseaux, ont conduit à l'idée d'encapsuler ces réseaux dans un espace qui représente mieux cette couche d'information comme une jonction (la mécanique de base pour ces processus de transports avait été élaborée au départ pour répondre à des besoins de simulation de transport d'ondes [13]). Le système complexe apparaît déjà au niveau physique comme un entrelacement de réseaux qui travaillent chacun à élaborer des processus simples (relativement) mais dont les échanges d'informations dans le réseau supérieur des jonctions conduit à un système enchevêtré, irréversible. Cet agencement reste déterministe : il lui manque une dimension stochastique. Cette dimension probabiliste ne peut être un simple rajout de pondérations sur des liens, elle doit répondre à un but comme tout système complexe le fait. De fait, la probabilité devient jeu, et c'est sous l'aspect d'arbre de décision que l'on va accompagner le cheminement de l'information dans le support physique. Ce support doit avoir une image dans un espace des jeux, qui guide la probabilité de cheminement de l'information dans ses méandres voire guide sa construction et son développement. Dans l'idée qu'un système complexe dans sa définition (prenons celle de Joël de Rosnay rappelée dans l'ouvrage de Daniel Durand [14] : « ensemble d'éléments en interaction dynamique, organisés en fonction d'un but ») vise à réaliser un but, l'espérance de gain est le mobile de cette tentative. On trouve alors des prémices d'expressions mathématiques des grands principes de la systémique à partir d'une équation donnant cette espérance en fonction d'un support physique et d'une stratégie de jeu.

2. L'analyse tensorielle des réseaux de Gabriel Kron

Comme le souligne Kron dans son introduction à l'analyse tensorielle des réseaux, le mot clé de son ouvrage est « organisation ». Tout système complexe peut être vu comme un agencement de systèmes empilés dans un ordre de hiérarchie de la complexité croissante. Il ne s'agit pas, comme il est bien souligné dans les fondements de la systémique, d'un simple amoncellement de briques élémentaires, mais de la multiplication de structures déjà pourvues d'une certaine autonomie pour élaborer des structures supérieures plus conséquentes et pourvues à leur tour de nouvelles capacités inexistantes aux strates inférieures. Pour faire apparaître ces émergences il faut des processus de transformations et de changements d'échelles. Ces processus sont couverts par l'outil tensoriel, et c'est ce qu'avait compris Kron lorsqu'il fabriqua sa méthode. Nous allons en explorer l'œuvre dans les grandes lignes pour en extraire les éléments principaux et la compléter pour l'adapter aux besoins de la systémique.

a. La notion de réseau

La notion de réseau est ancienne et en tout cas déjà utilisée par Kirchhoff qui a été sans aucun doute l'un des premiers topologistes. Kirchhoff représentait des circuits électriques sous la forme de nœuds reliés par des branches. Ces branches portent des matières en mouvement : des charges, mais pas seulement ; on peut étendre ce transport à toutes sortes de choses comme des liquides, des champs, etc. Ces déplacements de matière sont provoqués par des forces qui résultent de gradient de potentiels sources du mouvement, potentiels reportés sur les nœuds. Aux nœuds, des échanges entre ces flux (dans le sens général) s'établissent pour respecter à l'échelle du réseau un bilan de la matière entrante et sortante. Chaque branche est repérée par un numéro et l'on peut construire une matrice qui indique quels nœuds appartiennent à quelle branche : cette matrice est appelée incidence ou matrice de structure [15], nous la noterons A. On peut ainsi imaginer un réseau pourvu de B branches : b^1, b^2, …, b^B et N nœuds : n^1, n^2, …, n^N. Pour construire A on associe au couple (b^i, n^j) la valeur +1, -1 ou 0 suivant que le nœud n^j soit l'extrémité, l'origine ou sans relation avec la branche b^i. On peut construire sur les ensembles B et N des espaces vectoriels ayant pour bases respectives $\vec{b}_B$ et $\vec{n}_N$, la matrice A devenant associée à la transformation linéaire de B vers N [16]. Ces définitions couvrent l'essentiel des techniques dites « nodales » [15] qui vont s'attacher à calculer les flux dans les branches du réseau connaissant les sources. Ces sources sont des sources de flux ou des forces motrices en général et l'on obtient le schéma de ce que l'on peut appeler « la branche de Kirchhoff » dont la figure 1 donne une représentation.

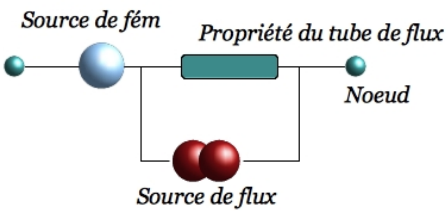

Figure 1 : Branche de Kirchhoff

Un point important de cette branche est la présence d'un élément nommé impédance pour les circuits électriques (et nous admettons la généralisation de ce terme à toute physique et tout domaine) et qui représente une fonction décrivant la propriété de la branche et du milieu qui lui est implicitement rattaché. Les trois grandeurs flux, source et impédance sont liées et dépendent les unes des autres. Remarquons que la branche de Kirchhoff peut être vue comme une représentation graphique de l'équation de Newton où l'opérateur d'impédance dans un formalisme de Laplace serait la variable de Laplace : p.

a. La vision de Gabriel Kron

Gabriel Kron ne partait pas de la branche mais de la boucle ([5] page 35). Il attachait une importance toute particulière à la propriété de la branche, qui ne pouvait être caractérisée que par une excitation locale avant de pouvoir être réemployée dans une structure plus grande. Kron appelait « réseau primitif » ces structures très simples qui ont la topologie d'une boucle élémentaire. Il avait remarqué que même dans les techniques nodales, on doit de toute façon fermer tôt ou tard le circuit pour établir le bilan d'énergie à l'échelle du réseau. Cette fermeture provoque un surdimensionnement du système d'équations à résoudre, et on lève cette difficulté en forçant arbitrairement le potentiel d'un nœud à zéro [17]. Alors que par le jeu des transformations, un assemblage minimum de deux branches peut être vu immédiatement comme une boucle ou maille. Plutôt que de considérer l'élément de base comme une branche ouverte, on part d'une maille fermée. Par le jeu des transformations, la réunion de deux, trois, B branches peut toujours se ramener à une structure de M mailles. La relation topologique d'Euler-Poincaré donne le lien entre le nombre de nœuds, de branches et de mailles d'un réseau (ou d'un graphe qui en est la représentation figuratrice) : M-B+N=1 [18]. Kron introduisit alors la connectivité, matrice reliant les branches et les mailles en définissant un espace vectoriel des mailles sur l'ensemble des mailles du réseau en associant au couple (b^i, m^j) la valeur +1, -1 ou 0 suivant que la branche appartienne et ait un flux dans la même direction que la maille, dans la direction inverse ou n'appartienne pas à la maille. En usant de la notation de l'indice muet [19], on peut comme précédemment écrire les flux de branches b^i comme combinaison linéaire des flux de mailles k^α et écrire si C est la connectivité : $b^i = C^i{}_\alpha k^\alpha$. On montre que ce changement de point de vue, de référentiel, a de nombreuses conséquences [17]. Parmi ces conséquences deux sont remarquables : d'une part dans « l'espace des mailles » les potentiels disparaissent, d'autre part le système d'équations à résoudre ne doit calculer que les courants des mailles sans avoir à calculer les différences de potentiels. Enfin, les propriétés du réseau apparaissent dans un tenseur fondamental directement, alors que dans les méthodes nodales, c'est l'inverse de ce tenseur qui doit être exprimé et cela complique notablement la compréhension fine et théorique du réseau et de ses comportements [20].

b. Graphe et topologie du réseau

Le graphe est l'expression graphique du réseau. Les figures réalisables en graphe ont des propriétés caractérisables de la même façon que les figures géométriques. Ainsi, deux branches réunies aux deux nœuds pour former une maille sont-elles assimilables à un tore. Topologiquement, les deux figures sont équivalentes [18][34], la première correspondant à une rétraction de la seconde. Tout flux conservatif, c'est à dire dont la matière reste concentrée dans un tube de diamètre fini et connu, diamètre qui peut évoluer le long du tube, est ramené dans un graphe à une branche. Sans l'hypothèse de conservation du flux, il y a soit représentation discrète par plusieurs branches d'un champ continu sur un domaine de l'espace, soit impossibilité d'utiliser une topologie discrète de graphe pour représenter le phénomène réel. Nous verrons comment détourner cette difficulté au paragraphe 3. En restant dans ces hypothèses et restrictions, les graphes et leurs réseaux permettent, puisque l'on a vu que la branche de Kirchhoff était une autre expression de la loi de Newton et si la représentation en mailles de Kron conserve les équations de la physique, de représenter tous les phénomènes physiques non relativistes par des « schémas équivalents » qui sont autant de réseaux redonnant les équations du phénomène modélisé. La restriction au domaine non relativiste n'est pas bloquante en pratique, car l'hypothèse des flux conservatifs implique finalement des distances faibles. Les effets relativistes (de relativité restreinte ou générale) se feront sentir sur des champs étendus qui sont couplés par l'intermédiaire des cordes, abordées au paragraphe 3. Les schémas équivalents sont utilisés depuis longtemps dans les domaines de la thermique et de la mécanique [21][22][23]. La question à laquelle il nous faut répondre est l'invariance des équations de la physique dans la transformation de Kron.

c. Représentation du monde par des réseaux

L'intuition de Kron à utiliser l'algèbre tensoriel provient de cette volonté d'utiliser des descriptions différentes des réseaux sans pour autant remettre en question leur généralité. Si cela est réalisable, alors il doit exister un invariant pour le démontrer. Kron eu l'idée de partir de la puissance : effectivement, si invariant il y a, ce doit être une grandeur proche de l'énergie ou de son débit, puisque quel que soit la représentation que l'on se donne pour un phénomène physique, le scalaire énergie ne doit pas pour autant changer. Repartons de l'expression de la branche de Kirchhoff. Les relations entre différence de potentiel V, flux f, sources e et s donnent : $e_a - V_a = g_{ab}(f^b - s^b)$. Nous utilisons ici les propriétés de l'algèbre tensoriel. Le lecteur désireux de revoir ces notions peut se reporter à l'ouvrage [24]. La différence des deux sources peut être remplacée par une unique source T, et la différence des flux également : k. On trouve alors une forme de l'équation ramenée à : $T_a = g_{ab}k^b$. g est le tenseur fondamental qui regroupe toutes les impédances du réseau. Appliquons le changement de référentiel pour exprimer les flux de branches en fonction des flux de mailles : $T_a = g_{ab}C^b_{\sigma}k^{\sigma}$. Multiplions à gauche par la matrice transposée de changement de base : ${C_\rho}^a T_a = {C_\rho}^a g_{ab} C^b_{\sigma} k^{\sigma}$, en contractant les produits on trouve finalement : $T_\rho = g_{\rho\sigma}k^{\sigma}$. Or le produit par C transposée se justifie par l'existence de l'invariant. La puissance est le produit sources – flux : $W = T_a k^a$. Remplaçons les flux de branches par leurs homologues : $W = T_a C^a_{\sigma} k^{\sigma}$. Pour que ce produit reste invariant, il faut nécessairement que les sources dans l'espace des mailles s'écrivent : $T_\sigma = {C_\sigma}^a T_a$ or ${C_\sigma}^a$ est la matrice transposée de C^a_{σ}. Il vient alors naturellement : $W = T_a C^a_{\sigma} k^{\sigma} = {C_\sigma}^a T_a k^{\sigma} = T_\sigma k^{\sigma}$. Nous avons ici quelque peu raccourci et simplifié ce qui serait une démonstration plus formelle de l'usage de l'analyse tensorielle appliquée à la transformation de description des réseaux. Le lecteur intéressé pourra se reporter à la référence [25] pour plus de détail. Mais nous avons pu évoquer par ce biais la démarche qu'a employé Kron pour créer (il s'agit bien d'une création) une algèbre qui étend l'algèbre tensorielle telle qu'elle est utilisé dans les transformations d'espaces riemanniens pour l'appliquer aux réseaux. Les justifications mathématiques de ces nouveaux concepts ont été faite entre autre par Banesh Hoffman [26]. Le tenseur g donnant en quelque sorte la « distance » entre les sources et les flux peut être vu comme une métrique.

Tous les électroniciens savent que de deux branches en parallèle, celle qui portera le plus fort courant sera celle de moindre impédance. On traduit ici intuitivement ce qui se trouve dans les composantes de la métrique g.

d. L'expression générale de l'équation d'un réseau

Dans la description de Kron, les branches sont remplacées par des mailles. Que deviennent les sources de flux ? Elles sont ajoutées comme autant de flux de mailles, mais dont les valeurs sont connues. Dans l'espace des mailles, l'équation de Kirchhoff généralisée au réseau entier se simplifie. Les différences de potentiels V de T s'annulent par intégration sur un contour fermé : $C_\sigma{}^\alpha V_a = 0$. Il ne reste à résoudre que les flux de mailles. Si e sont les forces motrices sources, g le tenseur métrique, k les flux inconnus et t les flux connus, l'équation du réseau devient : $e_\sigma = g_{\sigma\alpha}\{k^\alpha + t^\alpha\}$.

3. Projections dans l'espace continu

La projection du monde sur le graphe passe dans nos premières hypothèses par une contrainte de convergence maîtrisée des flux. Si cette contrainte n'est pas bloquante en électromagnétisme pour les champs statiques (électrostatiques, magnétostatiques) avec les flux de champs correspondants [1] elle le devient dès lors que l'on veut intégrer des champs continument variables et à flux non borné. Comment intégrer les interactions avec des champs continus dans ces représentations discrètes ? Partant de la réalité des antennes, qui sont des éléments discrets interagissant avec l'espace des champs environnants, localement homogène et d'apparence continue, O.Maurice s'est inspiré de cette réalité pour l'implémenter dans la théorie des réseaux de Kron. Or une antenne a un schéma équivalent, couramment utilisé par les télécommunications et ce depuis longtemps. Ce schéma se résume finalement à une impédance d'entrée incorporant une résistance de rayonnement. Mais comment donner la dimension du diagramme à ce schéma « 2D » ? On pouvait cette fois s'inspirer des techniques de calcul des antennes ou des travaux menés sur la modélisation des antennes en groupe de moments rayonnants. Ces moments sont soient des dipôles électriques soit des dipôles magnétiques. Or le lien avec le réseau est immédiat. Tout condensateur est un dipôle électrique et toute maille est un dipôle magnétique. On pouvait donc créer un espace des moments, connecté à l'espace des mailles ou des branches. Considérons l'espace des mailles. Le produit du courant de maille par une surface donne le moment de l'antenne correspondante. On peut donc engendrer une connexion S qui a chaque maille fasse correspondre un moment : $m^q = S^q{}_\alpha k^\alpha$. Côté réception, une connexion similaire donne la fém induite en fonction d'un champ local : $e_\omega = S_\omega{}^\alpha A_\alpha$. Ce champ s'exprime en fonction du moment émetteur : $A_\alpha = \mu_{\alpha q} m^q$. Par remplacements, on trouve que l'interaction via l'espace continu de Maxwell se traduit sous la forme d'un coefficient de couplage usuellement appelé « mutuelle inductance » et donné par : $M_{\omega\alpha} = S_\omega{}^\sigma \mu_{\sigma q} S^q{}_\alpha$. Ainsi l'interaction qui utilise comme support l'espace des champs continus s'intègre comme coefficient de couplage entre deux mailles dans l'espace discret des mailles. Les moments sont comme des portes sur un vaste monde par lequel transite une partie de l'énergie échangée entre les réseaux ou au sein du même réseau. Pour représenter cette interaction dans le graphe, il était intéressant de créer un nouveau symbole : la corde. Une corde entre deux mailles symbolise une interaction via des moments rayonnants [20]. Il y eu ensuite un autre cas où ces cordes se sont avérées utiles : pour représenter un échange d'énergie par ondes guidées. On ne peut en effet utiliser une branche pour un flux où le vecteur champ est transverse à la direction de propagation. En tout cas cela pose des difficultés majeures par rapport aux hypothèses de convergence que nous avons formulé pour pouvoir réaliser des homothéties et rétracter les tubes de flux en branches de graphes et pour respecter les bilans énergétiques aux nœuds. Partant des travaux

[1] pour le champ magnétique, les ingénieurs depuis longtemps ont élaboré le modèle des réluctances qui permet de modéliser très précisément les répartitions d'énergie magnétique dans les systèmes pourvus de matériaux de perméabilité magnétique relative non unitaire.

de Branin [6] et en les combinant aux travaux de Collins, A.Reineix a étendu les modèles de Paul [37] et réexprimé ceux de Collins et montré que l'on pouvait ramener aux seules conditions limites des structures d'ondes guidées et les remplacer par l'usage de matrices chaînes. L'échange d'énergie dans le graphe se trouve alors symbolisé par une corde qui relie deux branches qui représentent les conditions limites en charge de la structure [28]. La figure 2 montre des réseaux en interaction par rayonnement et par ondes guidées.

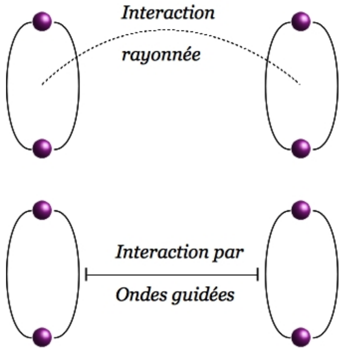

Figure 2 : interactions par cordes

Lorsque plusieurs réseaux interagissent uniquement par des cordes, la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'ensemble s'écrit : M-B+N=R, où R est le nombre de réseaux en interactions.

a. Du réseau élémentaire au système complet

Partant d'un réseau, on va construire un réseau plus complexe non pas seulement par de simples emboîtements du réseau élémentaire, mais plus généralement par une succession de transformations de ce réseau élémentaire accompagnées de rajout de couplages [31]. L'ensemble des interactions par cordes enrichit la métrique de composantes extra-diagonales regroupées dans un tenseur que l'on peut différencier du premier et même séparer les interactions par ondes guidées u, des interactions par rayonnements : μ. Or les composantes par rayonnement peuvent subir des déformations éventuellement relativistes lorsque les réseaux sont en mouvement. Ce dernier tenseur peut parfois se développer en une somme incluant des coefficients de Christoffel pour traduire des torsions, des rotations, etc. L'équation générale des réseaux prendra une forme : $e_\sigma = (g_{\sigma\alpha} + u_{\sigma\alpha} + \mu_{\sigma\alpha})\{k^\alpha + t^\alpha\} = R_{\sigma\alpha}\{k^\alpha + t^\alpha\}$. On résout cette équation tensorielle pour en extraire les flux : $k^\alpha = y^{\alpha\sigma}(e_\sigma - R_{\sigma\alpha}t^\alpha)$, y étant l'inverse du tenseur R.

4. L'encapsulation dans un espace des jonctions

On dispose à cette étape d'un outil déjà puissant et qui permet de résoudre une quantité de problèmes phénoménale. Il est certain qu'aujourd'hui, tout le tour de la technique n'a pas encore été fait. Mais il manque à cet outil une dimension : celle de l'information. L'information peut être présente certes, par exemple sous forme de signaux véhiculés par des guides d'ondes. Mais comment transmettre de l'information au sens de Shannon ? Des mots ? Des structures informatives de haut niveau voire conceptuelles ou psychiques ? Un premier exercice très concret portant sur des échanges d'information perturbés dans des mémoires avait donné lieu à une recherche d'un « espace de l'information » [30]. A cette occasion, on avait vu que les réseaux, supports physiques, convenaient mal à ce type de flux. Une autre opportunité apparue avec des travaux [13] sur la propagation d'ondes suivant un nouveau formalisme. Des objets permettent de transmettre l'information entre des ports de jonctions, et cela de façon « rythmée », chaque application de ces opérateurs provoque le déplacement de l'information de ports en ports. Au sein même de ces ports, l'information était traitée suivant des processus de matrice de dispersions [30]. L'idée a alors été de remplacer les matrices de dispersions par des processus de réseaux, et de profiter du mécanisme de transmission d'information entre ports pour véhiculer les sorties de différents réseaux. De cette « encapsulation » jaillit un formalisme extrêmement puissant que nous allons présenter dans les paragraphes suivants.

a. Les mécanismes de propagation d'une information dans un réseau de jonctions

Imaginons un vaste réseau composé de J jonctions et de ports qui sont des entrées – sorties sur ces jonctions : P. Les ports comme les jonctions sont numérotés. La figure 3 présente une telle structure.

Figure 3 : réseau de jonctions

Créons un vecteur des ondes (ce sont des ondes d'information en général) associé à ce graphe. Ce vecteur comporte 4 composantes car le réseau comporte lui-même 4 ports. Soit E ce vecteur, on a : $E = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Créons une matrice de dispersion, arbitrairement on suppose que toutes les jonctions transmettent les ondes sans retours ni atténuations. On trouve que la transmission dans la jonction 1 est assurée par un coefficient $S_{21}=1$ et celle dans la jonction 2 par un coefficient $S_{43}=1$. Tous les autres coefficients de la matrice S_{ij} sont nuls. Créons un propagateur : c'est une matrice que nous noterons γ, qui assure la propagation des ondes sur les liens entre les ports des jonctions. Seuls les ports 2 et 3 sont en relation ici. De fait, posons les coefficients γ_{21} et γ_{12} égaux à 1, tous les autres nuls. On s'aperçoit alors que si l'on applique une première fois S, soit S.E, le vecteur des ondes devient : $E = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$. Appliquons maintenant le propagateur en faisant γ.S.E, on trouve $E = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$. Enfin pour traverser la jonction 2, on réapplique S pour obtenir : $S.\gamma.S.E = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$. On a déplacé notre onde de l'entrée vers la sortie. Evidemment, nous allons utiliser ce processus de façon généralisée avec des coefficients complexes et un espace lié.

b. L'idée d'insérer des réseaux comme support physique des diffusions dans les jonctions

Reprenons l'équation du réseau en réduisant le second membre : $k^\alpha = y^{\alpha\sigma} x_\sigma$ avec $x_\sigma = (e_\sigma - R_{\sigma\alpha} t^\alpha)$. Un réseau peut se comporter comme un répartiteur S. Il suffit juste de transformer les dimensions des ondes pour avoir la compatibilité entre les entrées-sorties du réseau et celle de la matrice de répartition S. Nous verrons cela dans le paragraphe suivant. La matrice de répartition exprime des sorties en fonction d'entrée, usuellement de mêmes dimensions physiques, de la forme : sortie$_i$=S_i^j entrée$_j$. Notre équation de réseau fait bien la même chose, si ce n'est son aspect tensoriel. Mais cela n'est pas bloquant, si l'on sait connecter ces dimensions avec les jonctions, on retrouve un processus de transmission des signaux dans les jonctions via le réseau de métrique inverse y, puis transport de ces signaux en tant qu'ondes entre les jonctions par le propagateur γ.

c. L'encapsulation de l'espace des réseaux par l'espace des jonctions

Nous connaissons maintenant la gymnastique : créons une connexion entre l'espace des réseaux et celui des jonctions. Soit δ cette connexion, on écrit que le vecteur des ondes aux sorties des jonctions (il suffit de séparer le vecteur d'ondes en composantes d'entrées ou de sorties, les autres étant nulles pour créer séparément un vecteur des entrées et un vecteur des sorties) est connecté aux flux de mailles : $s^{m(+)} = \delta^m_{\ \sigma} k^\sigma$. Le (+) indiquant un instant courant. Le vecteur des flux s'exprime en fonction des forces motrices : $s^{m(+)} = \delta^m_{\ \alpha} y^{\alpha\sigma} e_\sigma$. Ces mêmes forces motrices sont connectées aux entrées p des jonctions par une connexion β : $s^{m(+)} = \delta^m_{\ \alpha} y^{\alpha\sigma} \beta_{\ \sigma}^{a} p_a$. Ces entrées résultent d'une propagation des sorties provenant de l'instant précédent : $s^{m(+)} = \delta^m_{\ \alpha} y^{\alpha\sigma} \beta_{\ \sigma}^{a} \gamma_{am} s^m$. Par contraction on fait apparaître la métrique pour écrire : $\omega^{ma} = \delta^m_{\ \alpha} y^{\alpha\sigma} \beta_{\ \sigma}^{a}$ et $s^{m(+)} = \omega^{ma} \gamma_{am} s^m$. Si l'on veut connaître l'état du vecteur des sorties à un instant N on calcule : $s^{m(N)} = (\omega^{ma}\gamma_{am})^N s^m$. Autant de fois que l'on applique le produit métrique x propagateur, autant de fois on avance dans l'état des sorties du réseau de jonctions.

d. La disposition d'un support physique

Le réseau de réseaux est encapsulé dans le réseau de jonctions. Les réseaux de chaque jonction peuvent interagir par rayonnement avec les réseaux d'autres jonctions. Ainsi il existe un échange d'énergie possible par dessus les liens entre jonctions qui se rajoute aux transports d'informations par ces liens. L'ensemble constitue un support physique où des réseaux qui en sont les fondements s'appuient sur des jonctions pour échanger l'information de haut niveau mais peuvent communiquer par des champs électromagnétiques ou de gravitation, ou …, porteurs d'énergie mais de peu d'information. De récentes découvertes semblent montrer par exemple que de tels processus existent au niveau du cerveau où les neurones échangent non seulement des informations électriques et chimiques élaborées par les axones et les synapses, mais aussi de l'information électromagnétique rayonnée [32].

5. La nécessité d'introduire une dimension de jeux

Lorsqu'on lit un ouvrage sur la théorie des jeux, on voit rapidement dessiné des résultats de gains pour les joueurs, soit sous forme de matrice, soit sous forme d'arbre. Sous forme d'arbre (ou développée) on représente à chaque jonction le choix du joueur pour l'étape suivante. Dans les mécanismes qui guident la construction ou les échanges d'information dans un système complexe comme le cerveau existe une dimension indescriptible qui participe aux décisions prises pour ségréguer, cheminer, traiter cette information. Sans chercher à modéliser exactement cette dimension, on peut la traduire dans ses actions par des probabilités de choix : user d'un arbre de décision tel qu'on peut l'étudier en théorie des jeux pour analyser le comportement du système complexe. Dans les transformations qui seront appliquées aux réseaux physiques, des pondérations probabilistes vont traduire les chances qu'il y a pour que le système étudié fasse le choix de telle ou telle transformation.

6. Travailler dans un espace image pour le jeu

La théorie des jeux, présentée sommairement (le lecteur intéressé pourra se référer à [33] pour une présentation très riche de cette théorie) consiste à calculer l'espérance de gain (au sens large) d'un joueur en fonction des conditions de jeu, de ses adversaires éventuels, de ses choix (sa stratégie) et de l'environnement. Pour que cette théorie participe au fonctionnement du support physique, il faut qu'existe un espace image qui fasse correspondre un lien probabiliste à chaque lien physique. Le fait que les réseaux préexistent ou se construisent au cours du temps ne change rien aux principes. En regard des jonctions physiques, on peut faire correspondre des jonctions unitaires comme dans l'exemple figure 3, de façon à d'abord se donner un degré de liberté supplémentaire pour la modélisation de la complexité, et garder le même séquençage d'événements que le support physique. Par contre les coefficients du propagateur seront les probabilités que l'information utilise tel lien pour se propager d'un port à l'autre. Appelons réseau (ou arbre) des décisions l'ensemble des jonctions et liens probabilistes. Si on présente une information I^k comme vecteur d'entrée de ce réseau, elle va atteindre une sortie S_u après des propagations pondérées en probabilités et des transmissions T dans les jonctions au bout de N cheminements par des liens diverses et autant d'événements : $S_u = T_u{}^n\left(\Gamma_{np}T^p{}_p\right)^N I^p$. Tout ce processus peut se résumer pour un temps donné par une équation de la forme : $S_u = \Omega_{up} I^p$.

7. Lier les deux espaces

L'espérance de gain EG au même instant est le produit des sorties probabilistes S_u par les sorties du support physique s^u. Soit : $EG = S_u s^u = \Omega_{up} I^u s^p$. Cette équation engendre un scalaire et relie les deux espaces physique et de décision. Elle peut être calculée à chaque étape du processus. Les probabilités qui constituent les coefficients du propagateur dans l'espace des décisions dépendent en général des sorties dans le support physique. Suivant tel résultat, le décideur pourra préférer telle orientation (c'est à dire telles transformations) plutôt que telle autre. Et, dans une dynamique maximum, ce choix pourra à son tour décider de la transformation à venir dans le support physique. On réalise dans ce cas une croissance pas à pas des réseaux.

8. La synthèse par la formule de l'espérance de gain

En remplaçant s^p par son expression on obtient :

$$EG_{(N)} = \Omega_{up_{(N)}} I^u{}_{(0)} \left(\omega^{pa}\gamma_{ap}\right)^N s^p{}_{(0+)}.$$

Cette équation synthétise le formalisme établi et en donne la sortie principale. Ses termes sont bien identifiés : Ω peut être vu comme une stratégie, I est l'entrée probabiliste (environnement, données de départ, …) les autres termes sont liés au support physique qui crée le résultat physique.

9. Retrouver les grands principes de la systémique

Ce formalisme permet de modéliser la complexité, du moins l'espère-t-on. Il permet d'identifier les trois causes de la complexité : les caractéristiques topologiques du support physique et de l'arbre des décisions peuvent être un premier critère de complexité, implicitement inclus dans les taux de remplissage de la métrique et de la stratégie (en tant que matrices). L'incertitude, les comportements chaotiques sont présents dans l'arbre des décisions et ses aléas, dans les opérateurs non linéaires de la métrique du support physique. L'ambiguïté des rapports entre le déterminisme du support physique et l'aléatoire de l'arbre des décisions constitue la troisième cause. On peut ainsi exprimer l'ensemble des propriétés abordées dans les ouvrages de systémique, y compris essayer de donner des critères pour évaluer la complexité d'un système [31]. Un point particulièrement intéressant est l'aspect contrôles et rétroactions. Dans la réalité on ne peut pas étudier un système sans le fermer, même aussi partiellement que l'on pourrait l'espérer [35]. On contredit ainsi un des grands principes de la systémique qui insiste sur la dégradation de l'analyse lorsque l'on coupe le système de ses échanges avec l'extérieur. Maintenant pour rester pragmatique, il est impossible de garder cette ouverture, par exemple si l'on désire analyser le comportement d'un virus on peut craindre de l'étudier dans son environnement possible. Comment se sortir de cette impasse ? Une voie, certes non triviale, consiste à modéliser le système dans un contexte restrictif plus ou moins fermé, puis à calculer par l'analyse tensorielle proposée ses réponses à des stimuli divers et pour des frontières ouvertes. Si l'on connaît une collection significative de ces stimuli, on peut les appliquer par calcul aux entrées des réseaux (support physique et arbre) pour en évaluer le comportement « in vivo ». Cet exercice est déjà réalisé pour des systèmes électroniques de façon à prédire leur robustesse dans des environnements sévères [36]. Pourquoi ne pas imaginer dans quelques années, une fois ce formalisme programmé, réaliser de telles virtualisations sur un système psychique ?

10. Méthodologie

La méthodologie générale s'articule autour de quatre étapes principales : construction du graphe des transformations possibles, ou de sa base de données, collection ; déduction de ce graphe du support physique ; construction de l'arbre des décisions lié et calcul et analyse.

11. Conclusion

Bien des essais, des expériences restent à mener pour conforter ou améliorer les choix effectués dans cette méthode d'analyse tensorielle. Nul doute cependant que ces outils tensoriels et topologiques offrent des capacités qu'aucun autre outil mathématique ne peut offrir avec autant de puissance. Il suffit de lire l'ouvrage de Penrose [38] pour s'en convaincre. Dans tous les cas nous aurons l'occasion dans les mois et années à venir de tester ces capacités sur des problèmes que l'on espère très diverses. Cet axe n'est pas complètement novateur, l'assemblage des compétences jeu, réseau, graphe, théorie ensembliste et information fait partie des bagages des ingénieurs en cybernétique [39]. Mais l'on espère ici par l'algèbre tensorielle les réunir en un formalisme unique.

Références

[1] Hawkins Stephen (2003), *Sur les épaules des géants.* Edition Dunod.

[2] Nakahara Mikio (2003), *Geometry, topology and physics.* Edition Taylor and Francis.

[3] Feynman Richard (1980), *La nature de la physique.* Edition Sciences.
[4] Eber Nicolas (2007), *Théorie des jeux.* Edition Dunod.
[5] Kron Gabriel (1939), *Tensorial analysis of networks.* Edition John Wiley and Sons.
[6] Vabre Jean-Paul (1975), *Monographie sur les lignes couplées.* Annals of telecommunications. Volume 30, n°11-12, pge 421-453.
[7] Christopoulos Christos (2006), *The transmission-line matrix modeling (TLM).* Edition Morgan and Claypool publishers.
[8] Roux Christian (2009), *Initiation à la théorie des graphes.* Edition Ellipses.
[9] Suesse R. & Civelek C. (2003), *Analysis of engineering systems by means of Lagrange and Hamilton formalisms depending on contravariant, covariant tensorial variables.* Edition Springer-Verlag. DOI 10.1007/s10010-003-0102-y.
[10] Kron Gabriel (1945), *Electric circuit models of the Schödinger equation.* Physical Review, n°67, pge 39-43.
[11] Wiener Norbert (1948), *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine.* Edition Kessinger Legacy Reprints.
[12] de Rosnay Joël (1975), *Le macroscope.* Edition Essais. Page 93.
[13] Maurice Olivier & Reineix Alain (2010), *Use of Dirac like matrices to compute the wave propagation in various medium.* http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00528234/fr/
[14] Durand Daniel (1979), *La systémique.* Edition puf.
[15] Peikari Behrouz, *Fundamentals of network analysis and synthesis.* Edition Prentice Hall.
[16] Kaufmann Arnold (1954), *Thèse : mise en équations et résolution des réseaux électriques en régime transitoire par la méthode tensorielle.* Faculté des sciences de Grenoble.
[17] Maurice Olivier (2009), *Différence fondamentale entre la description nodale et la description modale de la topologie électromagnétique dans un objectif de Diakoptique*. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00376527/fr/
[18] Hacther Allen (2001), *Algebraic topology*. Edition Cambridge university.
[19] Einstein Albert (2005), *Quatre conférences sur la théorie de la relativité.* Edition Dunod.
[20] Maurice Olivier (2007), *La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes.* Edition Hermès-Sciences.
[21] Monsefi Farid (2004), *Thèse : Combined Electric, Electromagnetic and Thermal Modeling based on a PEEC Approach.* Department of computer and electrical engineering. Lulea university of technology, Suède.
[22] Van Santen G.W. (1957), *Introduction à une étude des vibrations mécaniques.* Edition Bibliothèque technique Philips.
[23] Kron Gabriel (1948), *Tensorial analysis of control systems.* ASME Transactions, journal of Applied Mechanics n° 15, pge 107-124.
[24] Diu Bernard (2010), *La mathématique du physicien.* Edition Odile Jacob.
[25] Denis-Papin M. & Kaufmann Arnold (1966), *Cours de calcul tensoriel appliqué.* Edition Albin Michel.
[26] Hoffmann Banesh (1949), *Kron's non-Riemannian Electrodynamics.* Review of modern physics. Volume 21, n°3, pge 535.
[27] Collin E.Robert, *Field theory of guided waves.* Edition Mc Graw Hill Books.
[28] Reineix Alain & co. (2008), *Etude de la pénétration du champ dans une cavité : du développement modal vers la modélisation circuit – méthode de Kron.* Congrès CEM2008. Paris.
[29] Hubert Guillaume & co. (2009), *Both SEE and EMC constraints on electronics.* EMCCOMPO symposium 2009. Toulouse.
[30] Paladian Françoise & co. (2011), *Proposal of a general method to study wave propagation.* Congrès URSI, Istanbul 2011.
[31] Maurice Olivier (2011), *Rappel des bases en analyse tensorielle des réseaux.* Journée AFSCET à Andé, 2011.
[32] Bettayeb Khera (2011), *Neurones : on se trompait sur leur compte.* Revue Sciences et vie. N°1126, Juillet 2011.
[33] Fudenberg Drew & Tirole Jean (1991), *Game theory.* Edition MIT press.
[34] Durand Philippe (2011), *Graphes et géométries riemanienne en vue des applications*. Présentation séminaire mathématique CNAM, dpt. Ingénierie mathématique.
[35] Lachaux Jean-Philippe (2011), *Le cerveau attentif.* Edition Odile Jacob.
[36] Casagrande Rémi (2011), *Analysis of lightning impact on bundle.* Congrès EMCEurope 2011.
[37] Paul Clayton R. (2007), *Analysis of multiconductor transmission lines.* Edition Wiley intersciences.
[38] Penrose Roger (2007), *A la découverte des lois de l'univers.* Edition Odile Jacob.
[39] Korchounov Y. (1975), *Fondements mathématiques de la cybernétique.* Edition MIR.